



13 de Julho de 2006

Problema 4. Determine todos os pares de inteiros (x, y) tais que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Problema 5. Seja $P(x)$ um polinómio de grau $n > 1$ com coeficientes inteiros e seja k um inteiro positivo. Considere o polinómio

$$Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots)),$$

onde P aparece k vezes. Prove que existem no máximo n inteiros t tais que $Q(t) = t$.

Problema 6. A cada lado b de um polígono convexo P associa-se a maior das áreas dos triângulos contidos em P que têm b como um dos lados. Prove que a soma das áreas associadas a todos os lados de P é pelo menos o dobro da área de P .

*Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 7 pontos.*