



13 juillet 2006

**Problème 4.** Trouver tous les couples  $(x, y)$  d'entiers vérifiant

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

**Problème 5.** Soit  $P(x)$  un polynôme à coefficients entiers, de degré  $n > 1$  et  $k$  un entier strictement positif. On considère le polynôme  $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$ , dans lequel  $P$  apparaît  $k$  fois. Montrer qu'il existe au plus  $n$  entiers  $t$  tels que  $Q(t) = t$ .

**Problème 6.** A tout côté  $b$  d'un polygone convexe  $P$  on associe le maximum de l'aire d'un triangle contenu dans  $P$  et ayant  $b$  comme côté. Montrer que la somme des aires associées à tous les côtés de  $P$  est au moins le double de l'aire de  $P$ .

*Temps accordé: 4 heures et demie  
Chaque problème vaut 7 points*