47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

Ngày 12 Tháng 7 Năm 2006

Bài 1. Cho ABC là một tam giác với tâm đường tròn nội tiếp là I. P là một điểm ở trong tam giác thỏa mãn

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Chứng minh rằng $AP \geq AI$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $P = I$.

Bài 2. Cho P là một đa giác đều 2006 cạnh. Một đường chéo của P được gọi là *đoạn tốt* nếu các đỉnh đầu và đỉnh cuối của nó chia chu vi của P thành hai phần, phần nào cũng có số lẻ cạnh. Các cạnh của P cũng được coi là đoạn tốt.

Giả sử ta chia P thành các tam giác bởi 2003 đường chéo đôi một không có điểm chung thuộc miền trong của P. Hãy tính số lớn nhất các tam giác cân có hai cạnh là đoạn tốt có thể xuất hiện trong cách chia P như trên.

Bài 3. Xác định số thực nhỏ nhất M sao cho bất đẳng thức

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

được thỏa mãn cho tất cả các số thực a, b và c.

Thời gian làm bài: 4 giờ 30 phút
Mỗi bài được 7 điểm