12 липня 2006 року

Задача 1. Точка I – центр вписаного кола трикутника ABC. Усередині трикутника вибрано точку P таку, що

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з I.

Задача 2. Діагональ правильного 2006-кутника P називається доброю, якщо її кінці поділяють межу P на дві частини, кожна з яких містить непарне число сторін. Сторони P також називаються добрими.

Нехай P розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині P.

Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожний з яких має дві добрі сторони, може містити таке розбиття?

Задача 3. Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$\left| ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2) \right| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел a, b, c.

Час виконання роботи: 4 години 30 хвилин.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.