12 . јули 2006.

Задатак 1. Нека је I средиште уписане кружнице троугла ABC. У унутрашњости троугла изабрана је тачка P таква да је

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB .$$

Докажите да је $AP \geq AI$, при чему једнакост важи ако и само ако се тачка P подудара са тачком I .

Задатак 2. За дијагоналу правилног 2006-тоугла P кажемо да је *добра*, ако њени крајеви дијеле руб од P на два дијела тако да је сваки од њих састављен од непарног броја страница од P. За странице полигона P такође кажемо да су *добре.*

Посматрајмо разбијања полигона P на троуглове помоћу 2003 дијагонале, такве да никоје двије међу њима немају заједничку тачку у унутрашњости полигона P. Одредите максималан број једнакокраких троуглова са двије добре странице, који се могу појавити при неком таквом разбијању.

Задатак 3. Одредите најмањи реалан број M такав да неједнакост

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a, b и c.

Вријеме за рад: 4 часа и 30 минута
Сваки задатак вриједи 7 бодова