47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Slovenian**

12. julij 2006

Naloga 1. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC. Za točko P v notranjosti trikotnika velja

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Dokaži, da je $|AP| \geq |AI|$ in da enakost velja natanko takrat, ko je $P = I$.

Naloga 2. Za diagonalo pravilnega 2006-kotnika P rečemo, da je *dobra*, če njeni krajišči razdelita rob P na dva dela tako, da je v vsakem izmed njiju liho mnogo stranic večkotnika P. Za vse stranice večkotnika P rečemo, da so *dobre*.

Denimo, da P razdelimo z 2003 diagonalami na trikotnike tako, da se nobeni dve diagonali ne sekata v notranjosti P. Določi največje možno število enakokrakih trikotnikov z dvema dobrima stranicama, ki jih lahko dobimo pri takih razdelitvah večkotnika P.

Naloga 3. Določi najmanjše realno število M, za katerega velja neenakost

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

za vsa realna števila a, b in c.

Čas reševanja: 4 ure in 30 minut.
Vsaka naloga je vredna 7 točk.