47th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD SLOVENIA 2006

day: **1**

language: **Danish**

12. juli 2006

Opgave 1. Lad ABC være en trekant, og lad I være centrum i den indskrevne cirkel. Et punkt P i det indre af trekanten opfylder

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Vis at $AP \geq AI$, og at lighed gælder hvis og kun hvis $P = I$.

Opgave 2. Lad P være en regulær 2006-kant. En diagonal i P kaldes *god* hvis dens endepunkter deler randen af P i to dele begge bestående af et ulige antal kanter fra P. Kanterne i P kaldes også *gode*.

P deles op i 2003 trekanter af diagonaler der parvis ikke har skæringspunkter i det indre af P. Find det maksimale antal ligebenede trekanter med to gode sider, der kan fremkomme ved en sådan opdeling.

Opgave 3. Bestem det mindste reelle tal M sådan at uligheden

$$\left| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) \right| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

gælder for alle reelle tal a, b og c.

Tilladt tid: 4 timer og 30 minutter
Hver opgave er 7 point værd